UAA 2 : Lois de probabilité

Exercices supplémentaires

A. Vocabulaire et notations

1. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes. On obtient 10 points pour un as, 5 points pour un roi, 3 points pour une dame, 2 points pour un valet, 1 point pour une carte avec un numéro pair et aucun point pour une carte avec un numéro impair. La variable aléatoire *X* représente le nombre de points obtenus. Donne la loi de probabilité de X.

   Sol :

x_i	0	1	2	3	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{9}{26}$	$\frac{9}{26}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$

2. Une urne contient 8 boules blanches, 4 noires et 2 rouges. Un joueur extrait simultanément 2 boules de l'urne. Il gagne 2 € par boule noire et perd 1 € par boule blanche. La variable aléatoire *X* représente le gain du joueur. Donne la loi de probabilité de X.

   Sol :

x_i	-2	-1	0	1	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{13}$	$\frac{16}{91}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{32}{91}$	$\frac{8}{91}$	$\frac{6}{91}$

3. On lance deux dés et la variable aléatoire *X* indique la différence positive ou nulle entre les deux dés. Donne la loi de probabilité de X.

   Sol :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

4. Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de champagne. On retourne trois cases au hasard. X est la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de champagne découvertes. Donne la loi de probabilité de X.

   Sol :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{77}{100}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{1}{100}$

5. On considère le lancer d'un dé truqué dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	a	$2a$	$3a$	$3a$	$2a$	a

   A quelle condition sur a ce tableau définit bien une loi de probabilité ?

   Sol : $a = \frac{1}{12}$

B. Espérance et écart-type

1. Un lascar te propose le jeu suivant : « Je lance deux pièces en l'air. Si on voit deux piles, je te donne 3 euros, dans les autres cas, tu me donnes 1 euro. »
   Ce jeu est-il équitable ?
   Sol :Oui car l'espérance vaut 0.

2. Un sac contient 5 jetons numérotés 1, 1, 2, 2, 3. On vous propose le jeu suivant :
   Vous tirez un jeton au hasard et vous recevez alors une somme d'argent (positive ou négative !) égale au carré du nombre tiré diminué de 4 €.
   Cette proposition est-elle avantageuse ?
   Sol : Cette proposition est défavorable au joueur car l'espérance vaut $-\frac{1}{5}$ et est donc négative.

3. On vous propose le jeu suivant qui se joue en lançant 3 dés. Pour jouer, il faut verser 1 €. Pour 3 six, je reçois 36 € ; pour 2 six, 7 € et pour 1 six, 1 €.
   Est-ce équitable ?
   Sol : La loi de probabilité du gain (diminuée de la participation de 1 €) est donnée par

x_i	-1	0	6	35
$p(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

   Ainsi, $E(X) = 0$ et le jeu est équitable.

4. Afin de créer une loterie, on met dans une urne *n* billets différents (*n* supérieur ou égal à 3), dont deux et seulement deux sont gagnants.
   (1) Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.
      a. On suppose ici $n = 10$. *X* désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Détermine la loi de probabilité de *X*.

Sol : En utilisant un arbre, on a :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

b. On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calcule la probabilité, notée p_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

Sol : $\frac{2}{n}.\frac{n-2}{n-1}+\frac{n-2}{n}.\frac{2}{n-1}=\frac{4(n-2)}{n.(n-1)}$

(2) Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne, en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.

a. On suppose ici $n=10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Détermine la loi de probabilité de Y.

Sol :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

b. On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calcule la probabilité, notée q_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

Sol : $\frac{2}{n}.\frac{n-2}{n}+\frac{n-2}{n}.\frac{2}{n}=\frac{4(n-2)}{n^2}$

(3) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

Sol : Pour répondre à cette question, on va comparer les nombres p_n et q_n.

$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n.(n-1)} - \frac{4(n-2)}{n^2}$$

$$= \frac{4n(n-2)-4(n-2)(n-1)}{n^2(n-1)}$$

$$= \frac{4n^2 - 8n - 4\left(n^2 - n - 2n + 2\right)}{n^2\left(n-1\right)}$$

$$= \frac{4n^2 - 8n - 4n^2 + 12n - 8}{n^2\left(n-1\right)}$$

$$= \frac{4n-8}{n^2\left(n-1\right)}$$

On va établir le TS de cette expression :

n		0		1		2	
$4n-8$	-	-	-	-	-	0	+
n^2	+	0	+	+	+	+	+
$n-1$	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{4n-8}{n^2\left(n-1\right)}$	+	///	+	///	-	0	+

Comme n est supérieur ou égal à 3, on ne s'intéresse qu'à la dernière case dont le signe est positif. Autrement dit, $p_n - q_n \geq 0$.

Il est donc préférable de tirer deux billets simultanément.

C. Loi binomiale

1. On suppose que dans un livre de 200 pages, 220 (!) erreurs d'impression sont distribuées au hasard. Calcule la probabilité pour qu'une page donnée contienne

   (1) aucune erreur *Sol* : 0,402

   (2) une erreur *Sol* : 0,367

   (3) deux erreurs *Sol* : 0,167

   (4) deux erreurs ou plus *Sol* : 0,231

2. La proportion de la population française qui a un groupe sanguin AB est de 3 %. Dans un hôpital, un patient de groupe sanguin AB nécessite une transfusion d'urgence et il n'y a plus de sang AB disponible.

   (1) Quelle est la probabilité que parmi les 40 personnes présentes dans la salle d'attente, les médecins trouvent au moins un individu de groupe sanguin AB pour pouvoir effectuer la transfusion ?

   Sol : $p(X \geq 1) = 0,70$ où X est le nombre de personnes en salle d'attente de groupe AB.

   (2) Et si on était au Japon, où il y a 10 % de personnes de groupe AB ?

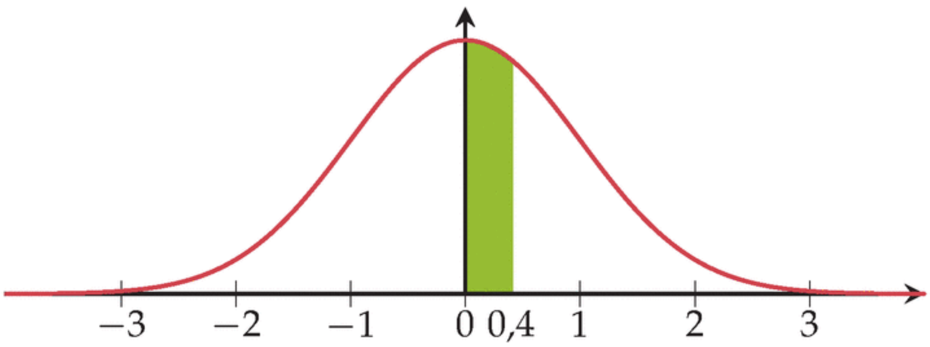
   Sol : $p(X \geq 1) = 0,99$

   (3) ET à Hawaï où seulement 1 % de la population est de groupe AB ?

   Sol : $p(X \geq 1) = 0,33$

D. Lois continues

1. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty;+\infty[$ est représentée ci-dessous :



On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $p(0 \leq X \leq 0,4) = 0,155$.

Donne une valeur approchée de :

(1) $p(-0,4 \leq X \leq 0)$ — *Sol* : 0,155

(2) $p(X > 0,4)$ — *Sol* : 0,345

(3) $p(X \leq 0,4)$ — *Sol* : 0,655

(4) $p(-0,4 \leq X \leq 0,4)$ — *Sol* : 0,31

2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(1) A quelles conditions sur a et b la fonction f est-elle la densité d'une variable aléatoire continue ?

Sol : $a \in \left[-\frac{3}{2};3\right]$ et $b = 1 - \frac{a}{3}$

(2) On suppose que a et b vérifient les conditions déterminées à la question précédente. Soit X une variable aléatoire de densité f. on suppose que $p(X \geq 0,5) = \frac{7}{8}$. En déduire a et b.

Sol : $a = 3$ et $b = 0$

(3) Calcule $E(X)=\int_0^1 x.f(x)dx$ et $V(X)=\int_0^1 x^2.f(x)dx-(E(X))^2$ en utilisant les valeurs de a et b obtenues à la question précédente.

Sol : $E(X)=\frac{3}{4}$ et $V(X)=\frac{3}{80}$

3. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[0;a]$ (où a est un nombre strictement positif) dont la fonction de densité est $f(x)=0,02$.

(1) Détermine la valeur de a.

(2) Calcule les probabilités :

a. $\mathrm{p}(X\in[0;\pi])$

b. $p(1\leq X\leq 12,2)$

c. $p(X^2+2X=0)$

d. $p(X^2<9)$

4. On remplit un verre de 20 cl de volume d'une quantité aléatoire d'eau choisie uniformément entre 0 et 20 cl.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir moins de 5 cl d'eau ?

Sol : $\frac{1}{4}$

(2) On vide 5 verres ainsi remplis dans une bassine. Quelle quantité moyenne d'eau obtient-on dans la bassine ?

Sol : 50 cl

5. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre 0,3. Calcule :

(1) $p(X\in[0;2])$

(2) $p(X\in[1;+\infty[)$

(3) $p(5<X<10)$

(4) $p(X\in[5;10])$

6. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

   (1) Sachant que $p(X > 30) = 0,2$, détermine λ .

   (2) On considère maintenant $\lambda = 0,05$. Calcule :

      a. $p(X \geq 15)$

      b. $p(X \geq 5)$

      c. $E(X)$

7. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que $E(X) = 45$.

   (1) Détermine la valeur de λ.

   (2) A-t-on $p(X \geq 45) = 0,5$? Justifie ta réponse.

8. Dans un collège, les oscilloscopes utilisés au cours de physique ont une durée de vie, en année, modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

   On sait que la probabilité qu'un oscilloscope fonctionne plus de 8 ans est égale à 0,383.

   (1) Détermine la valeur de λ.

   (2) Interprète et détermine $p(X \geq 3)$.

   (3) Donne une estimation de la durée de vie moyenne d'un oscilloscope.

9. Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1;11]$.

   (1) Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?

      Sol :0,2

   (2) Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?

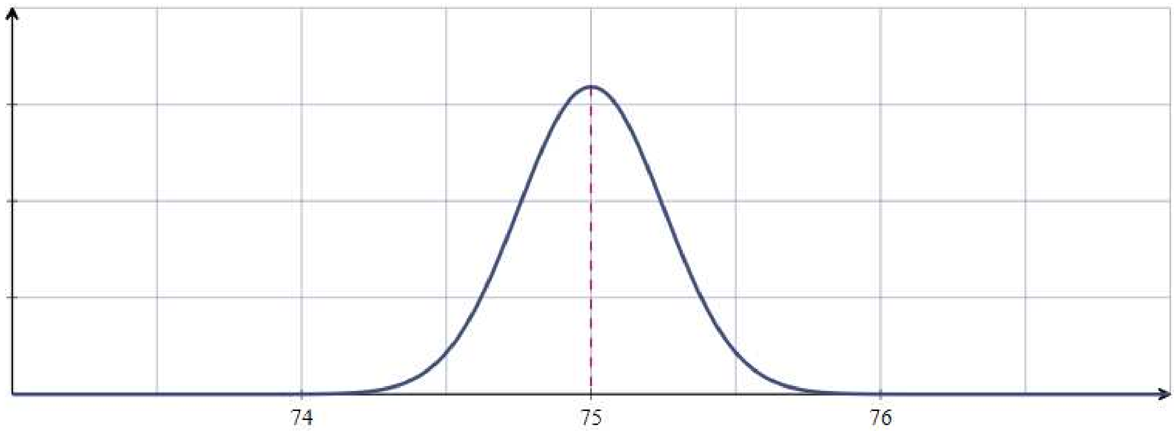
      Sol :0,3

   (3) Calcule le temps d'attente moyen à la caisse.

      Sol : 6 minutes

10. Un chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots du vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants. Une étude effectuée auprès d'un millier de jeunes enfants montre que les premiers mots apparaissent en moyenne, à 11,5 mois avec un écart-type de 3,2 mois. La distribution des âges étant normale, on souhaite
   (1) évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots avant 10 mois ;
   (2) évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots après 18 mois.

11. Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires.
   Le diamètre exprimé en millimètre, d'une médaille est conforme lorsqu'il appartient à l'intervalle $[74,4;75,6]$.
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque médaille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètre. On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type 0,25.
   La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la densité de probabilité de X.



   (1) Indique la valeur de μ.
   (2) Détermine la probabilité $p(74,4 \leq X \leq 75,6)$.
   (3) Détermine la valeur de h pour que $p(75-h \leq X \leq 75+h) \approx 0,95$.

12. Une machine produit des clous dont la longueur moyenne est de 12 mm, avec un écart-type de 0,2 mm. La longueur L d'un clou pris au hasard est une variable aléatoire qui suit une loi normale. Un clou est jugé défectueux si sa longueur est supérieure à 12,5 mm ou inférieure à 11,5 mm.
    (1) Quelle est la proportion de clous défectueux ?
    (2) Pour un clou défectueux pris au hasard, quelle est la probabilité que sa longueur soit inférieure à 11,5 mm ?

13. Une confiserie produit des plaques de chocolat. On admet que la variable aléatoire égale au poids d'une plaquette de 125 g suit une loi normale d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = 0,5$.

    La plaquette est jugée conforme lorsque son poids est compris entre $\mu - 3\sigma$ et $\mu + 3\sigma$.
    (1) Calcule la probabilité d'une plaquette tirée aléatoirement au hasard en fin de chaîne soit non conforme.
    (2) Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ tels que $p(\mu - h \leq X \leq \mu + h) = 0,99$. Ces poids d'alerte sont inscrits sur une carte de contrôle et correspondent à une marge de sécurité en lien avec des normes de conformité. Calcule ces poids d'alerte.

14. Pour des raisons de logistique, les organisateurs d'un marathon ont décidé de modéliser le temps de parcours (en heures) de chacun des 2000 participants par la loi normale de paramètres $\mu = 3,5$ et $\sigma = 0,5$.
    (1) Les organisateurs ont décidé d'installer le ruban sur la ligne d'arrivée deux heures après le départ du marathon.

        Selon ce modèle, quelle est la probabilité qu'un coureur pris au hasard termine sa course avant l'installation du ruban ?
    (2) Les organisateurs souhaitent commencer la cérémonie de remise des médailles pour les trois premiers coureurs lorsque 95 % des coureurs sont arrivés. Au bout de combien de temps doivent-ils prévoir de le faire ?

15. P, le poids du steak dans ton burger, suit une loi normale de paramètre $\mu = 120$ g et d'écart-type $\sigma = 15$.

    (1) Quelle est la probabilité que ton steak pèse entre 110 et 135 g ?

    (2) Quelle est la probabilité que ton steak pèse moins de 130 g ?

16. Une machine permet le conditionnement d'un jus de fruit dans des bouteilles.

    La quantité de jus injecté dans une bouteille par la machine, exprimée en ml, est modélisée avec une variable aléatoire *X*.

    On admet que celle-ci suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

    On prélève une bouteille au hasard en fin de chaîne de remplissage.

    (1) Détermine $p(X \leq 496)$ et donne une interprétation du résultat obtenu dans ce contexte.

    (2) Détermine la probabilité que la bouteille ait un contenu compris entre 497 et 500 ml.

    (3) Comment choisir α afin que $p(500 - \alpha \leq X \leq 500 + \alpha)$ soit égale à 0,95 ?

    (4) Une association de consommateurs a testé un lot de 200 bouteilles issues de cette chaîne de production. Il a été constaté que 15 bouteilles contenait contiennent moins de 500 ml de jus de fruit contrairement à ce qui est annoncé sur l'étiquetage.

        L'entreprise qui assure le conditionnement de ce jus de fruit affirme que 97 % des bouteilles produits contiennent au moins 500 ml de jus de fruit.

        Le test réalisé par l'association remet-il en cause l'affirmation de l'entreprise ?

17. Vrai ou faux ? Justifie ta réponse.

    (1) X_1 est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu_1 = 105$ et $\sigma_1 = 2$.

        X_2 est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu_2 = 10{,}5$ et $\sigma_2 = 0{,}2$.

        Affirmation : $p(X_1 \geq 109) < p(X_2 < 10)$

    (2) T_1 est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu = 15$ et $\sigma = 5$.

T_2 est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{7}$.

Affirmation : $p(T_1 > 10) > p(T_2 < 10)$

(3) Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $\mu = 20$ et σ et vérifie $p(X < 30) = 0,7$.

Affirmation : La valeur de σ est supérieure à 15.

(4) Une entreprise fabrique et vend des pots de confiture de 350 g.

E. Approximations de la loi binomiale

1. Le nombre X de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de 7,5 secondes suit une loi de Poisson de paramètre 3,87.

   (1) Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ? Calcule l'écart-type correspondant.

   Sol : Il y a en moyenne 3,87 désintégrations durant chaque période 7,5 secondes.

   $\lambda = 3,87 = E(X) = V(X) \Rightarrow \sigma = 1,97$

   (2) Détermine la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de 7,5 secondes.

   Sol : 0,021

   (3) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 3 et 5 désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes.

   Sol :0,547

2. On estime à 16 % la proportion de gauchers dans une population. On choisit dans cette population 900 personnes au hasard « avec remise ». Quelle est (à 10^{-2} près) la probabilité qu'il y ait dans cet échantillon :

   (1) au plus 140 gauchers ?

   (2) au moins 150 gauchers ?

   sol : Utiliser l'approximation par la loi normale.

3. Un questionnaire à choix multiples, comprend 36 questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Un candidat très ignorant choisit une réponse au hasard à chaque question. On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de réponses exactes. Calculer la probabilité qu'il réponde juste à au moins 5 questions.

4. Pour un certain traitement médical, on a observé que les patients peuvent faire une réaction allergique avec une probabilité de 0,02. On prévoit de traiter 1 225 personnes. Quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins 30 qui fassent cette réaction allergique.

5.